

Devoir sur Table 5

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1*(Banque PT, Maths A, 2017)*

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^{n-1}.$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p .
 - (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n)$.
 - (b) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p . On note T le rang du premier succès obtenu : $T = \inf \{k \geq 1, X_k = 1\}$. Montrer que T a même loi que X .
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p .
 - (a) Calculer la fonction génératrice de X puis de $X + Y$.
 - (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = p^2(n - 1)(1 - p)^{n-2}$.
 - (c) Déterminer, pour $n \geq 2$, la loi de X sachant $X + Y = n$.
3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p . On pose $T = \max(X, Y)$ et $Z = \min(X, Y)$. On pose $q = 1 - p$.
 - (a) Exprimer $X + Y$ et $|X - Y|$ en fonction de Z et T .
 - (b) Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{1 + q}$.
 - (c) Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

On pourra caractériser la loi de Z par sa fonction de répartition.
 - (d) Déterminer la loi de T .

Exercice 2

(Banque PT, Maths B, 2015)

1. Question préliminaire.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie d , et f un endomorphisme de E .

$\text{Ker}(f)$ désigne le noyau de f , et $\text{Im}(f)$ son image. On note $f^2 = f \circ f$. Enfin, Id_E est l'endomorphisme identité de E . λ désigne un réel.

(a) Démontrer que :

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda^2 \text{Id}_E)$$

Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?

(b) Démontrer que si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0_E\}$, alors

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) \geq \dim(\text{Ker}(f)) + 1.$$

(c) On désigne par P_f et P_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2 .

Démontrer que $P_{f^2}(X^2) = (-1)^d P_f(X) P_f(-X)$.

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E , par :

$$f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1)$$

(a) Démontrer que f est un endomorphisme de E .

(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Préciser leur dimension.

(c) f est-il injectif ? Surjectif ?

(d) Justifier que 0 est valeur propre de f . Que peut-on dire de sa multiplicité ?

(e) Démontrer que les polynômes $Q_1 = 3X^3 + 4X^2 - 3X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f . Quelles sont les valeurs propres associées ?

(f) A-t-on $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$?

(g) Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.

(h) f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ? Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Problème

(CCINP PSI, 2021)

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel.

On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Objectifs

Ce problème est composé de deux parties indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α .

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Partie I — Quelques propriétés des fonctions f_α

1. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α .
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel α , le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α .
On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.
3. On suppose dans cette question que $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.
4. Expliciter f_0 , f_{-1} et f_1 .
5. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.
6. Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. On pourra comparer f_α à f_1 .

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

7. Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.
8. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance.
Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II — Un logarithme complexe

1. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui, à $x \in]-1, 1[$, associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z , tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) =$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}.$$

2. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S .
Pour tout x réel élément de $] -R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable **réelle** t suivante :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g .
4. Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.
5. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

6. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^k = p(1-p)^n \frac{1}{p} = (1-p)^n$$

D'où, $\text{pour } n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.

- (b) Soit $T = \inf(k \geq 1, X_k = 1)$, on a alors $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0]\right) \cap [X_k = 1]\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0)\right) \times \mathbb{P}(X_k = 1) \quad \text{par indépendance mutuelle des } (X_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \\ &= p(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi T et X ont bien la même loi

2. (a) Si X est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p , on a alors,

$$G_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} t^n p(1-p)^n$$

Le critère de D'Alembert nous assure que la rayon de convergence de cette série entière est $\frac{1}{1-p}$ si $p \neq 1$ et $+\infty$ si $p = 1$.

Pour $t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[$ on a

$$\boxed{G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}}$$

Puisque X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$ on a alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$, d'où

$$\boxed{\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad G_{X+Y}(t) = \left(\frac{pt}{1 - (1-p)t}\right)^2}$$

- (b) On sait que, pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, d'où, d'après le théorème de dérivation terme à terme

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

Ainsi

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad \frac{p^2 t^2}{(1 - (1-p)t)^2} = p^2 t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n p^2 (1-p)^{n-1} t^{n+1}$$

D'où, par décalage d'indice

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[, \quad G_{X+Y}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p^2 (1-p)^{n-2} t^n$$

Or, pour $t \in \left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$ on a $G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X+Y=n)$, ainsi par unicité du développement en série entière en 0, on obtient

$$\boxed{\forall n \geq 2, \mathbb{P}(X+Y=n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

- (c) Pour tout $n \geq 2$, on a $\mathbb{P}(X+Y=n) \neq 0$. Sachant $[X+Y=n]$ la variable aléatoire X est à valeurs dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k|X+Y=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{p^2(1-p)^{k-1} \times (1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, sachant $X+Y=n$ la variable aléatoire X , suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$

3. (a) Pour tout couple de réels (x, y) , on a :

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y \quad \text{et} \quad \max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$$

Ainsi, $X+Y=T+Z$ et $|X-Y|=T-Z$.

- (b) D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $([X=k])_{k \in \mathbb{N}^*}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=Y, X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k) \quad \text{par indépendance} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} \\ &= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{2-p} \\ &= \frac{p}{1+p} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X=Y) = \frac{p}{1+q}$.

- (c) La loi d'une variable aléatoire étant entièrement caractérisée par sa fonction de répartition on va ici, comme suggéré par l'énoncé, déterminer F_Z .

Puisque X et Y sont à valeurs entières positives, Z l'est également et il nous suffira donc de déterminer les valeurs de $F_Z(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z > n) &= \mathbb{P}([X > n] \cap [Y > n]) \\ &= \mathbb{P}(X > n) \times \mathbb{P}(Y > n) \quad \text{par indépendance} \\ &= ((1-p)^n)^2 \quad \text{d'après 1.(a)} \\ &= (q^2)^n\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_Z(n) = \mathbb{P}(Z \leq n) = 1 - \mathbb{P}(Z > n) = 1 - (q^2)^n$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

On en déduit que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2 > 0$.

(d) On sait que $T = \max(X, Y)$, nous en déduisons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leq n) &= \mathbb{P}(X \leq n, Y \leq n) \\ &= \mathbb{P}(X \leq n) \times \mathbb{P}(Y \leq n) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - q^n)(1 - q^n) \\ &= (1 - q^n)^2 \\ &= 1 - 2q^n + q^{2n}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}(T \leq n) - \mathbb{P}(T \leq n-1) \\ &= 1 - 2q^n + q^{2n} - 1 + 2q^{n-1} - q^{2n-2} \\ &= 2(1-q)q^{n-1} - (1-q^2)q^{2n-2} \\ &= 2p(1-p)^{n-1} - p(2-p)(1-p)^{2n-2}\end{aligned}$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = n) = 2(1-q)q^{n-1} - (1-q^2)q^{2n-2} = 2p(1-p)^{n-1} - p(2-p)(1-p)^{2n-2}$$

Fonction de répartition

Si on ne reconnaît pas la fonction de répartition d'une loi usuelle, on peut également calculer $\mathbb{P}(Z = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbb{P}(Z = n) = F_Z(n) - F_Z(n-1)$ ce qui ici donne $\mathbb{P}(Z = n) = (1-q)q^{2n}$

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) Soit $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$. Alors $f(x) = \lambda x$, donc

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$$

Ainsi $(f^2 - \lambda^2 \text{Id}_E)(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda^2 \text{Id}_E)$.

On a bien l'inclusion $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda^2 \text{Id}_E)$.

Soit λ une valeur propre de f , alors $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ n'est pas réduit au singleton $\{0_E\}$, donc, d'après le résultat, il en est de même pour $\text{Ker}(f^2 - \lambda^2 \text{Id}_E)$, donc λ^2 est valeur propre de f^2 .

On a ainsi prouvé que tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2 .

(b) On suppose que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

En appliquant le résultat de la question précédente avec $\lambda = 0$, on obtient $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$, ainsi $\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f^2))$.

Maths B

Attention aux impasses, il peut tout à fait y avoir une partie non négligeable d'algèbre linéaire dans un sujet Maths B

Pour obtenir l'inégalité demandée, on va prouver que l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ est stricte.

D'après l'hypothèse $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0\}$, il existe donc un vecteur x non nul dans l'intersection $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Alors $f(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$. On en déduit que $f^2(y) = f(x) = 0_E$, donc $y \in \text{Ker}(f^2)$, et, puisque $x = f(y)$ est non nul, $y \notin \text{Ker}(f)$.

Ceci prouve que l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ est stricte, donc l'inégalité entre les dimensions est stricte : $\dim \text{Ker}(f) < \dim \text{Ker}(f^2)$. Puisque ces dimensions sont entières on a alors

$$\dim(\text{Ker}(f)) \leq 1 + \dim(\text{Ker}(f^2))$$

(c) Par définition, $P_f(X) = \det(X \text{Id}_E - f)$ et $P_{f^2}(X^2) = \det(X^2 \text{Id}_E - f^2)$. Or

$$(X \text{Id}_E - f) \circ (X \text{Id}_E + f) = (X \text{Id}_E)^2 - f \circ (X \text{Id}_E) - X \text{Id}_E \circ f + f^2 = X^2 \text{Id}_E - f^2$$

Le déterminant d'une composée étant le produit des déterminants on a

$$P_{f^2}(X^2) = \det(X^2 \text{Id}_E - f^2) = \det(X \text{Id}_E - f) \det(X \text{Id}_E + f) = P_f(X) \det(X \text{Id}_E + f).$$

Enfin, l'espace E étant de dimension d , on a $\det(X \text{Id}_E + f) = (-1)^d \det((-X) \text{Id}_E - f) = (-1)^d P_f(-X)$, ce qui amène à

$$P_{f^2}(X^2) = (-1)^d P_f(X) P_f(-X)$$

2. (a) Soit P de $\mathbb{R}_n[X]$, par définition de f on a

$$f(P) \in \text{Vect}(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1) \subset \mathbb{R}_3[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, sans difficulté

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (X^2 - X + 1)(P + \lambda Q)(-1) + (X^3 - X)(P + \lambda Q)(0) + (X^3 + X^2 + 1)(P + \lambda Q)(1) \\ &= (X^2 - X + 1)(P(-1) + \lambda Q(-1)) + (X^3 - X)(P(0) + \lambda Q(0)) + (X^3 + X^2 + 1)(P(1) + \lambda Q(1)) \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

Finalement f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On va tout d'abord montrer que la famille $(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1)$ est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a(X^2 - X + 1) + b(X^3 - X) + c(X^3 + X^2 + 1) = 0$, on a alors

$$\begin{cases} b + c &= 0 \\ a + c &= 0 \\ -a - b &= 0 \\ a + c &= 0 \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} b + c &= 0 \\ a + c &= 0 \\ -b + c &= 0 \end{cases}$$

Et donc $a = b = c = 0$.

La famille $(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1)$ est donc libre.

Soit $P \in \text{Ker}(f)$. par liberté de la famille $(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1)$ on a alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$.

Réciproquement, si $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$ alors $P \in \text{Ker}(f)$.

Or, on a $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$ si et seulement si $(X+1)X(X-1) = X^3 - X$ divise P , ainsi

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} \\ &= \{(X^3 - X)Q, Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]\} \\ &= \{(X^3 - X) \sum_{k=0}^{n-3} a_k X^k, (a_0, \dots, a_{n-3}) \in \mathbb{R}^{n-3}\} \\ &= \text{Vect}(X^3 - X, X^4 - X^2, \dots, X^n - X^{n-2})\end{aligned}$$

La famille $(X^3 - X, X^4 - X^2, \dots, X^n - X^{n-2})$ est échelonnée en degrés, elle est donc libre, c'est ainsi une base de $\text{Ker}(f)$. Finalement

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} = \text{Vect}(X^3 - X, X^4 - X^2, \dots, X^n - X^{n-2})}$$

Et $\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = n - 3}$

On a vu que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1)$. De plus

$$(X^2 - X + 1) = f\left(\frac{X^2 - X}{2}\right) \in \text{Im}(f)$$

$$(X^3 - X) = f(1 - X^2) \in \text{Im}(f)$$

$$(X^3 - X^2 + 1) = f\left(\frac{X^2 + X}{2}\right) \in \text{Im}(f)$$

D'où $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1)}$ et donc, puisque la famille $(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1)$ est libre, $\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = 3}$.

On peut par ailleurs remarquer que

$$\begin{aligned}\text{Vect}(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1) &= \text{Vect}(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X^2 + 1 - X^2 + X - 1) \\ &= \text{Vect}(X^2 - X + 1, X^3 - X, X^3 + X) \\ &= \text{Vect}(X^2 - X + 1, 2X^3, X^3 + X) \\ &= \text{Vect}(X^2 - X + 1, X^3, X) \\ &= \text{Vect}(X^2 + 1, X^3, X)\end{aligned}$$

(c) L'endomorphisme $\boxed{f \text{ n'est pas injectif}}$, puisque son noyau est de dimension $n - 2 \geq 1$.

De plus $\boxed{f \text{ n'est pas surjectif}}$ puisque $\dim(\text{Im}(f)) = 3 < \dim(E) = n + 1$.

(d) $\boxed{\text{Puisque } f \text{ n'est pas injectif, il admet } 0 \text{ comme valeur propre.}}$

La dimension du sous-espace propre associé à 0 (i.e. de $\text{Ker}(f)$) est, d'après la question

2.(b), égale à $n - 2$, donc $\boxed{\text{la multiplicité de } 0 \text{ en tant que valeur propre de } f \text{ est supérieure ou égale à } n - 2.}$

(e) Calculons $f(Q_1)$ et $f(Q_2)$.

$$\begin{aligned}f(Q_1) &= (X^2 - X + 1) \times 8 + (X^3 - X) \times 4 + (X^3 + X^2 + 1) \times 8 \\ &= 12X^3 + 16X^2 - 12X + 16 \\ &= 4Q_1(X),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(Q_2) &= (X^2 - X + 1) \times (-2) + (X^3 - X) \times 0 + (X^3 + X^2 + 1) \times 2 \\ &= 2X^3 + 2X\end{aligned}$$

$$= 2Q_2(X).$$

Les polynômes Q_1 et Q_2 étant non nuls, ces relations montrent que :

Q_1 est un vecteur propre de f pour la valeur propre 4 et

Q_2 est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2.

- (f) D'après les résultats de la question 2.(b), le polynôme $X^3 - X$ appartient à $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont donc pas en somme directe, ce qui montre que

la relation $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ n'est pas satisfaite.

- (g) D'après la question 1.(a), tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2 . Puisque 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f , 0, 4 et 16 sont des valeurs propres de f^2 .

De plus, d'après la question 2.(f), $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{E\}$, et donc, d'après la question 1.(b), $\dim(\text{Ker}(f^2)) \geq \dim(\text{Ker}(f)) + 1 = n - 1$.

Les sous-espaces propres de f^2 associés à 4 et 16 étant de dimension au moins 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de f^2 est supérieure ou égale à $n - 1 + 1 + 1 = n + 1 = \dim(E)$.

On en déduit que f^2 est diagonalisable, et n'admet aucune autre valeur propre que 0, 4 et 16.

De plus :

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = n - 1, \quad \dim(\text{Ker}(f^2 - 4\text{Id}_E)) = 1, \quad \dim(\text{Ker}(f^2 - 16\text{Id}_E)) = 1.$$

- (h) Puisque f^2 est diagonalisable, le polynôme caractéristique $P_{f^2}(X)$ est scindé, et, au vu des dimensions des sous-espaces propres, on a

$$P_{f^2}(X) = X^{n-1}(X - 4)(X - 16).$$

Ainsi, $P_{f^2}(X^2) = X^{2n-2}(X^2 - 4)(X^2 - 16)$, et donc, en utilisant 1.(c) :

$$P_f(X)P_f(-X) = (-1)^n X^{2n-2}(-2)(X + 2)(X - 4)(X + 4).$$

Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ divise donc $(-1)^n X^{2n-2}(-2)(X + 2)(X - 4)(X + 4)$, qui est un polynôme scindé. Ainsi, $P_f(X)$ est scindé, donc f est trigonalisable.

On peut procéder d'une autre manière en utilisant les résultats des questions 2.(d) et 2.(e) :

0 est valeur propre de f de multiplicité au moins $n - 2$, 2 est valeur propre de f et 4 est valeur propre de f . P_f est alors divisible par $X^{n-2}(X - 4)(X - 2)$. Le quotient de cette division est un polynôme unitaire de degré $n + 1 - n = 1$ à coefficients réels, il est donc de la forme $X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a ainsi $P_f = X^{n-2}(X - 4)(X - 2)(X - \alpha)$, P_f étant scindé, f est triagonalisable.

Montrons que f n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde :

Supposons que f est diagonalisable, il existe alors une base de E constituée de vecteurs propres pour f . Puisque $\text{Ker}(f)$ est de dimension $n - 2$, on peut choisir une telle base $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $f(P_i) = 0$ pour $i \leq n - 3$ et $f(P_i) = \lambda_i P_i$ pour $i \geq n - 2$ avec λ_i valeur propre non nulle de f .

Mais alors, $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est encore une base de vecteurs propres pour f^2 : les valeurs propres associées sont 0 pour $i \leq n - 3$ et $\lambda_i^2 \neq 0$ pour $i \geq n - 2$, d'où $\dim(\text{Ker}(f^2)) = n - 2$, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question 2.(g).

Ainsi f n'est pas diagonalisable.

On sait déjà que 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f , la dimension du sous-espace propre associé à 0 est $n - 2$.

Si f admettait une autre valeur propre, la somme des dimensions des sous-espaces propres serait supérieure ou égale à $n + 1$, ce dont on pourrait déduire que f est diagonalisable. Ainsi, les seules valeurs propres de f sont 0, 2 et 4.

Par le même argument de non-diagonalisabilité de f on en déduit que

$$\dim(E_0(f)) = n - 2, \quad \dim(E_2(f)) = 1, \quad \dim(E_4(f)) = 1$$

Plus précisément, le sous-espace propre associé à 0 est l'ensemble des multiples de $X(X-1)(X+1)$, le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par Q_2 , et celui associé à 4 est la droite vectorielle engendrée par Q_1 .

Corrigé de l'exercice

Partie I — Quelques propriétés des fonctions f_α

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a, pour $n \geq 1$,

$$\left| \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \right| = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, les séries entières définissant les fonctions f_α ont toutes le même rayon de convergence $[R = 1]$.

2. D'après ce qui précède, on a $] -1, 1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1, 1]$.

La série converge $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente si $\alpha \leq 0$. Si $\alpha > 0$ alors on a

$$\text{— Pour tout } n \geq 1, \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} < 0$$

$$\text{— La suite } \left(\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| \right)_{n \geq 1} \text{ est décroissante et converge vers 0.}$$

Ainsi, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Finalement on a

$$\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}] -1, 1[& \text{si } \alpha \in] -\infty, 0] \\ [-1, 1[& \text{si } \alpha \in] 0, 1] \\ [-1, 1] & \text{si } \alpha \in] 1, +\infty[\end{cases}$$

3. Pour $x \geq 0$, la série est à termes positifs donc $f_\alpha(x) \geq 0$.

Pour $x \leq 0$, la série est une série alternée donc sa somme est du signe de son premier terme, ainsi $f_\alpha(x) \leq 0$.

Donc $f_\alpha(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ et $f_\alpha(x) \leq 0$ si $x \leq 0$.

4. On reconnaît des développements en série entière usuels

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

D'après le théorème de dérivation terme à terme, on a

$$f'_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

d'où

$$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = xf'_0(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

5. Dans tous les cas la fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[=] -1, 1[$.

Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Le théorème d'Abel radial nous assure alors que f_α est continue en 1.

De même, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge, là encore le théorème d'Abel radial nous assure alors que f_α est continue en -1 .

Finalement f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha = [-1, 1]$.

6. On suppose que $\alpha \leq 1$, alors

$$\forall x \in [0, 1[, \frac{x^n}{n^\alpha} \geq \frac{x^n}{n}$$

Ainsi, pour $x \in [0, 1[$,

$$f_\alpha(x) \geq f_1(x) \geq -\ln(1-x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) = +\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

7. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$, ainsi G_α converge en $x=1$. Ainsi $1 \in \mathcal{D}_\alpha$ d'où $\alpha > 1$.

Puisque $G_\alpha(1) = 1$ alors $\lambda f_\alpha(1) = 1$ et donc $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.

8. X_α admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.

$$\text{Or } \sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n \geq 1} n \frac{\lambda}{n^\alpha} = \lambda \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Ainsi X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 2$

Dans ce cas

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \lambda f_{\alpha-1}(1) = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}$$

Partie II — Un logarithme complexe

1. On a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

2. Pour $n \geq 1$ on a

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}} \right| = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'après le critère de D'Alembert, la série entière définissant S est de rayon $R=1$.

Dérivation

Il serait tentant de vouloir calculer $G'_X(1)$ mais comme G_X a un rayon égal à 1, rien ne nous dit que G est bien dérivable en 1.

Pour $x \in]-1, 1[$ on a $S(x) = \ln(1+x)$, ainsi

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \exp(S(x)) = 1+x$$

3. Pour $n \geq 1$ on a

$$\left| \frac{\frac{(-1)^n z_0^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1} z_0^n}{n}} \right| = \frac{n+1}{n} |z_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z_0|$$

D'après le critère de D'Alembert, la série entière définissant g est de rayon $R_g = \frac{1}{|z_0|}$.

4. D'après le théorème de dérivation des séries entières, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R_g, R_g[$. Or, puisque $|z_0| < 1$ on a $[0, 1] \subset] \frac{-1}{|z_0|}, \frac{1}{|z_0|} [$.

Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.

Par dérivation terme à terme on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} = \frac{z_0}{1 + tz_0}$$

5. D'après ce qui précède, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ en tant que composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour $t \in [0, 1]$, on a $h'(t) = g'(t) \exp(g(t)) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t)$.

Ainsi, on a bien

$$\forall t \in [0, 1], \quad h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t)$$

6. On peut simplement remarquer que la fonction $z : t \mapsto 1 + tz_0$ est solution de cette équation différentielle. De plus $z(0) = 1 = h(0)$. Ainsi, h et z sont solutions du même problème de Cauchy, donc elle sont égales.

En $t = 1$, on obtient $h(1) = \exp(S(z_0)) = z(1) = 1 + z_0$.

Équation différentielle

La fonction $\ln$ n'étant pas définie sur les nombres complexes, on ne peut pas procéder en suivant naïvement la méthode vue pour les équations à coefficients à valeurs dans $\mathbb{R}$, en effet il ne nous est pas possible de primitiver la fonction $t \mapsto \frac{z_0}{1 + tz_0}$.